16/1/2018

Τρία Θεωρήματα που σχετίζονται μεταξύ τους:

① Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Θ.Π.Σ.) — Πολύ βασικά

② Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης (Θ.Α.Α.)

③ Θεώρημα Πολλαπλασιαστών Lagrange (χρήσιμο για εύρεση «ακροτάτων υπό συνθήκη»).

① Θ.Π.Σ. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά, $\bar{F} = (F_1, \ldots, F_m): U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\bar{F}$ C^1 και $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U \times V$ με $\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{0}$ και

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F_m(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

αντιστρέψιμος. Τότε: $\exists\ \delta, \varepsilon > 0$ $\forall\ \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U$ $\exists!\ \bar{g}(\bar{x}) \in B(\bar{y}_0, \varepsilon) \subset V$ $\bar{F}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) = \bar{0}$ και $\bar{g}: B(\bar{x}_0, \delta) \longrightarrow B(\bar{y}_0, \varepsilon)$ συνεχώς διαφορίσιμη και

Επίσης $\exists\ \delta_1 \in (0, \delta)$ έτσι ώστε $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ αντιστρέψιμος $\forall\ \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta_1)$

και $D\bar{g}(\bar{x}) = -\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, g(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Απλούστερη δυνατή περίπτωση: $n=m=1$

Πόρισμα: Έστω $F: \underbrace{(a,b)}_{=U} \times \underbrace{(c,d)}_{=V} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και $(x_0,y_0) \in (a,b)\times(c,d)$ με $F(x_0,y_0)=0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Τότε: $\exists \delta_1, \varepsilon > 0$ $\forall x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \subset (a,b)$

$\exists!$ $g(x) \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$

$F(x,g(x))=0$ και $g: (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \longrightarrow (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) \subset (c,d)$

με $\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \neq 0$ και $g'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Παρατήρηση Λέμε ότι η $\bar{g}$ ορίζεται πεπλεγμένα (implicitly) μέσω της $\bar{F}(\bar{x},\bar{y})=\bar{0}$ αφού η $\bar{g}$ προκύπτει από την επίλυση της (1) ως προς $\bar{y}$

Επιφανέστερο (γνωστό) Παράδειγμα: $F(x,y)=x^2+y^2-1$

Τότε: $F(x,y)=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2=1$ έχει λύσεις (x,y), τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

Έστω $(x_0,y_0)=(0,1)$ Τότε $F(x_0,y_0)=0$ και

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 \underset{\text{Εδώ}}{=} 2 \neq 0 \underset{\text{Θ.Π.Σ.}}{\Longrightarrow} \exists\ \delta_1>0\ \forall x \in (-\delta_1, \delta_1)$

$\exists!$ $y(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ με $F(x,g(x))=0$ και $y'(x)=\dots$

και $y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = -\frac{2x}{2y(x)} = -\frac{x}{y(x)}$

[Το Θ.Π.Σ. δεν μας λέει ποιο είναι το $\bar{g}(\bar{x})$ (ή εδώ το $y(x)$) μας λέει ποιες είναι οι ιδιότητες του κυρίως η μοναδικότητα του κοντά στο (x_0,y_0)

$x^2+y^2=1 \Longleftrightarrow y^2=1-x^2 \underset{\text{για } x\in(-\delta_1,\delta_1)}{\Longrightarrow} y=\pm\sqrt{1-x^2}$

και διαπιστώνω ότι για να έχουμε $(0,y(0)) = (0,1) = (x_0,y_0)$

πρέπει να επιλέξουμε $y(x) = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y(x)} (-2x) = -\frac{x}{y(x)}$$

<u>Άσκηση</u>

Δείξε ότι κοντά στο σημείο $(x,y)=(0,0)$ υπάρχουν λύσεις $y(x)$ της εξίσωσης $e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y = 1$

<u>Λύση</u>

$$F(x,y) = e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin(xy)} \cdot \cos(xy) \cdot y + 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin(xy)} \cdot \cos(xy)\, x - 2$$

Αφού $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2) \overset{\text{v}}{\Longrightarrow} F \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$(F \in C^\infty(\mathbb{R}^2))$ $\quad F(0,0) = 0$ v $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2 \neq 0$ v

Από Θ.Π.Σ. $\exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in (-\delta, \delta)$
$\exists!\, y(x) \in (\underbrace{0-\varepsilon}_{y(0)-\varepsilon}, \underbrace{0+\varepsilon}_{y(0)+\varepsilon})$ που λύνει την $F(x,y) = 0$

$y(0) = 0$

Επίσης, υπολογίζεται η παράγωγος

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \Longrightarrow y'(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}$$

<u>Παρατήρηση</u> Τι ρόλο παίζει η συνθήκη $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Ας δούμε ένα «γελοίο» παράδειγμα:
Έστω η εξίσωση $y = ax$, $a > 0$ η οποία είναι «λυμένη ως προς y» δηλ ξέρω ότι η λύση

της είναι $y(x)=ax$

$y=ax \iff F(x,y)=0$, όπου $F(x,y)=y-ax$

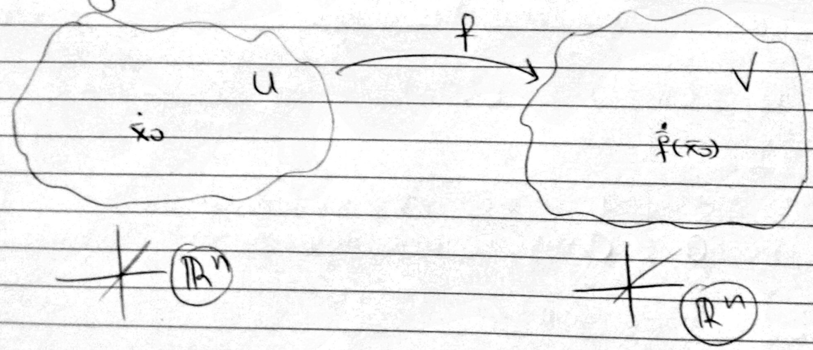
με $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=1\neq 0$.

Ενώ, ας πούμε, την εξίσωση $G(x,y)=0$ όπου $G(x,y):=x$ δεν μπορούμε να την λύσουμε μοναδικά ως προς y. και $\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}=0$.

② Θ.Α.Α. Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0\in U$, $\bar f:U\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\boxed{D\bar f(\bar x_0)\in\mathbb{R}^{n\times n} \text{ αντιστρέψιμη}}$

$\Longrightarrow \exists\, U_0$ ανοικτό με $\bar x_0\in U_0\subset U$ και $V:=B(\bar f(\bar x_0),\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, έτσι ώστε η $\bar f|_{U_0}:U_0\to V$ είναι 1-1 και επί. Επιπλέον, η $\bar g:=(\bar f|_{U_0})^{-1}$, είναι συνεχώς διαφορίσιμη με $D\bar f(\bar g(\bar y))\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο πίνακα και $D(g(\bar y))=(D\bar f(\bar g(\bar y)))^{-1}$

ή ισοδύναμα, με $D\bar f(\bar x)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο $\forall \bar x\in U_0$ και $D\bar g(\bar f(\bar x))=(D\bar f(\bar x))^{-1}$, $\forall \bar x\in U_0$



$\bar y=\underbrace{\bar f(\bar x)}_{\underbrace{\bar f(\bar 0)}_{=0}+D\bar f(0)\bar x}$ $\quad \bar y=\underbrace{D\bar f(\bar x_0)}_{\text{αντιστρέψιμος}}\cdot\bar x \Longrightarrow \bar x=D\bar f(\bar x_0))^{-1}\cdot\bar y$ η αντίστροφη εικόνα του $\bar y$.

Παρατήρηση: Για να το θυμόμαστε. Αν $\bar f(\bar 0)=\bar 0$ τότε (Taylor) $\bar f(\bar x)\approx D\bar f(0)\cdot\bar x$ και άρα, κοντά στο $(\bar x_0,\bar y_0)=(\bar 0,\bar 0)$ επειδή η $\bar y=D\bar f(0)\cdot\bar x$ αντιστρέφεται θα αντιστρέφεται (εκεί κοντά???) και η $\bar y=\bar f(\bar x)$.

__Άσκηση__: Έστω $\bar f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, 1-1 και επί, (1 μεταπαράγ…
Δείξτε ότι η αντίστροφη απεικόνιση $\underbrace{\bar f^{-1}}_{=\bar g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Είναι η ___ $D(\underbrace{\bar f^{-1}}_{=\bar g})(\bar y) = D\bar f(\underbrace{f^{-1}(\bar y)}_{=\bar g(\bar y) = \bar x})^{-1}$

__Λύση__

$$\bar x \longmapsto \boxed{\bar f(\bar x) = \bar y}$$

$$\bar x = \underbrace{f^{-1}(\bar y)}_{=\bar g(\bar y)} \longleftarrow\!\!| \ \bar f(\bar x) = \bar y$$

$$\bar f(\bar f^{-1}(\bar y)) = \bar y = \bar f(\bar y),$$

Έστω $\bar y \longmapsto \bar f(\bar y) := \bar y$ τότε $D\bar f(\bar y) =$

$$\bar y = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \bar f(\bar y) = \bar y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{I}{\overset{\|}{D\bar f(\bar y)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar y) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar y) \end{pmatrix}, \text{ όπου}$$

$$f_i(\bar y) = f_i(y_1, \ldots, y_n) = y_i$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = I$$

άρα για την ταυτοτική απεικόνιση $\bar y \mapsto \bar y$, $\bar y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $DI(\bar y) = I$

__Τώρα__: $D(\underbrace{f(f^{-1}(\bar y))}) = D I \bar y = I$

$$= D(f \circ f^{-1})(\bar y)$$

$$= \underbrace{D\bar f(f^{-1}(\bar y))}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \underbrace{Df^{-1}(\bar y)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}$$

χωρίς παύλες και συντομία

$$\underbrace{f(f^{-1}(y))}_{=(f\circ f^{-1})(y)} = \underbrace{y}_{id} = Iy \qquad I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ ταυτοτική απεικόνιση.}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{D(f\circ f^{-1})(y)}_{= Df(f^{-1}(y))\cdot Df^{-1}(y)} = \underbrace{DIy}_{= I} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Df^{-1}(y) = \left(Df(\underbrace{f^{-1}(y)}_{=x})\right)^{-1}$$

Ιούνιος 2017: Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|}{|x|+|y|}$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+2)\, e^{-1/(x^2+y^2)}$

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|}{|x|+|y|}$ Για $(0,\frac{1}{v}) \to (0,0)$ έχουμε όριο $= 0$

Για $(\frac{1}{v},0) \to (0,0)$ έχουμε όριο $= 1$, άρα το όριο δεν υπάρχει

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cancel{(x^2+y^2)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{\cancel{x^2+y^2}} = 2.$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+2)\cdot e^{-1/x^2+y^2} = 0$

Θέμα 3 α) Δείξτε ότι $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$, είναι συνεχής

Λύση

Θ.ν.δ.ο. $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \implies \|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}\| \iff \big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|\big| \to 0$

$\iff \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$

$0 \leq \big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|\big| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$

β) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ Βρείτε τις κατευθύνσεις στις οποίες μηδενίζεται η κατευθ. παράγωγος του f στο $(x_0, y_0) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$

Λύση

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (v_1, v_2) \text{ όπου}$$

$(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ με $v_1^2 + v_2^2 = 1$

$$= \dots = \frac{4 x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} (y_0, -x_0) \cdot (v_1, v_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial (v_1, v_2)} (x_0, y_0) = 0 \implies (y_0, -x_0) \cdot (v_1, v_2) = 0 \iff$$

$$y_0 v_1 - x_0 v_2 = 0 \implies \frac{y_0}{x_0} = \frac{v_2}{v_1} \implies$$

$$(v_1, v_2) = \left(v_1, \frac{v_2}{v_1} v_1\right) = v_1\left(1, \frac{y_0}{x_0}\right) = (x_0, y_0) \frac{v_1}{x_0}$$

Επειδή $\|(v_1, v_2)\| = \|(x_0, y_0)\| \left|\dfrac{v_1}{x_0}\right| \overset{!}{=} 1$

$$\implies |v_1| = \frac{|x_0|}{\|(x_0,y_0)\|} \implies v_1 = \pm \frac{x_0}{\|(x_0,y_0)\|} \implies$$

$$\boxed{(v_1, v_2) = \pm \frac{(x_0, y_0)}{\|(x_0, y_0)\|}}$$